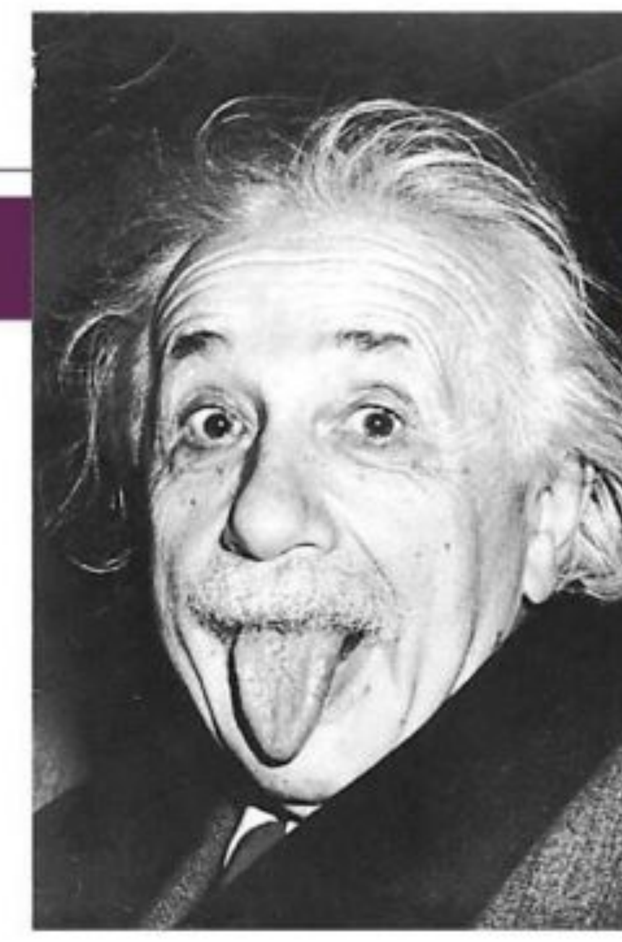
7º Campeonato de Matemática de la Universidad de La Frontera

dme.ufro.cl/cpmat



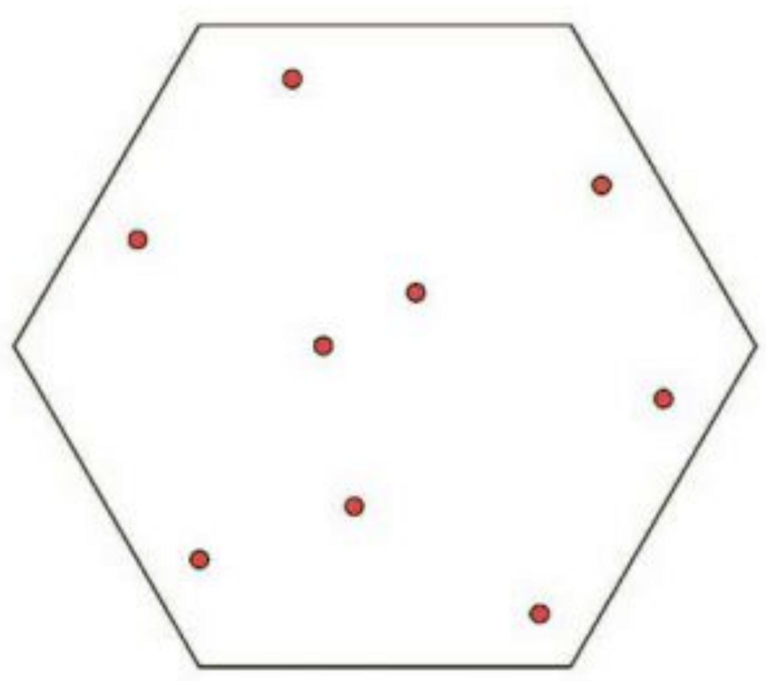
El Rincón del Abuelo Anacleto

Curiosidades de la matemática

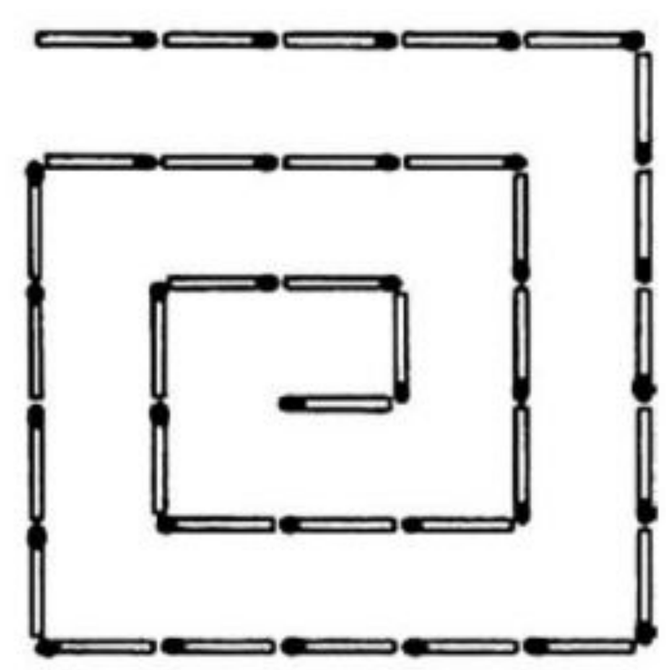
1- El abuelo Anacleto matemático jubilado y aventurero, en la librería de los libros muertos de Barcelona encontró el número 142857, que es bastante curioso. Cuando llegó a Temuco le pidió a sus nietos que multiplicaran dicho número por 2, luego por 3, por 4, por 5 y por 6. Sus nietos se sorprendieron al ver que todos los resultados de estos productos fueron la misma serie de números en distinto orden, por ejemplo:

- $3 \cdot 142857 = 428571$
- $5 \cdot 142857 = 714285$

Luego el abuelo Anacleto multiplicó el número por 7 obteniendo 999999, que curioso ¿o no?, ¿podrías explicar por qué sucede esto?.



2- Dado el siguiente hexágono, dibuja nueve cuadriláteros de igual tamaño trazando 9 líneas, de modo que cada cuadrilátero encierre un solo punto.



3- Reubica cuatro fósforos en la espiral, de tal forma que se obtengan tres cuadrados.

Problemas. Primera Fecha

Problema 1

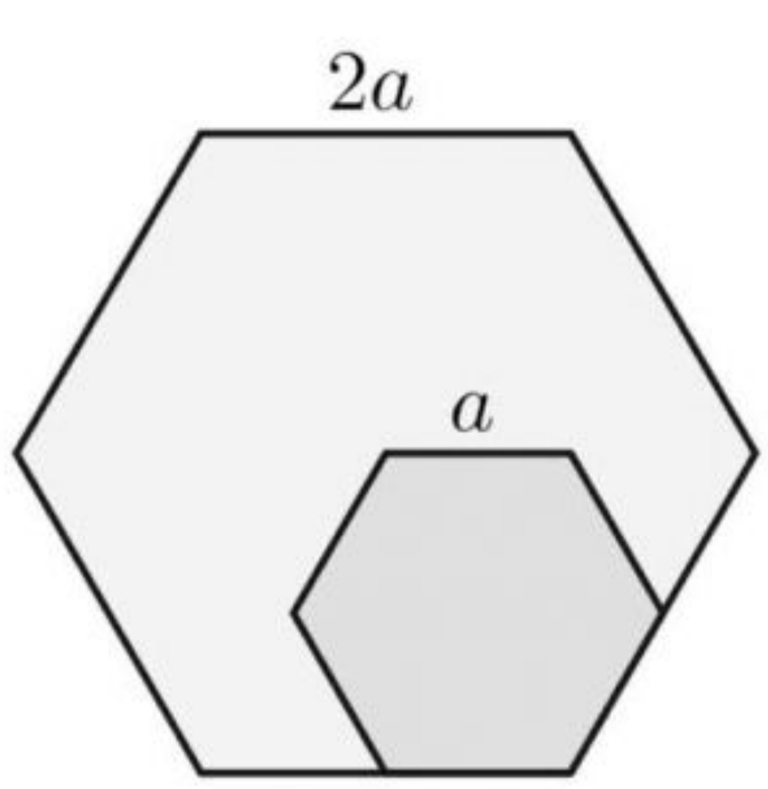
Seis niñas comparten un departamento con dos baños que utilizan todas las mañanas a partir de las 7:00 en punto. Ellas usan el baño una a la vez, y se sientan a desayunar juntas tan pronto como la última chica ha terminado. Pasan 9, 11, 13, 18, 22 y 23 minutos en el baño respectivamente. Estando bien organizadas, ¿Qué es lo más temprano que pueden desayunar juntas?

Problema 2

Seis semanas son $n!$ segundos. Calcule el valor de n.

Problema 3

La longitud de los bordes del hexágono regular grande es dos veces la longitud de los bordes del hexágono regular pequeño. El hexágono pequeño tiene una superficie de 4 cm². ¿Cuál es el área del hexágono grande?



Problema 4

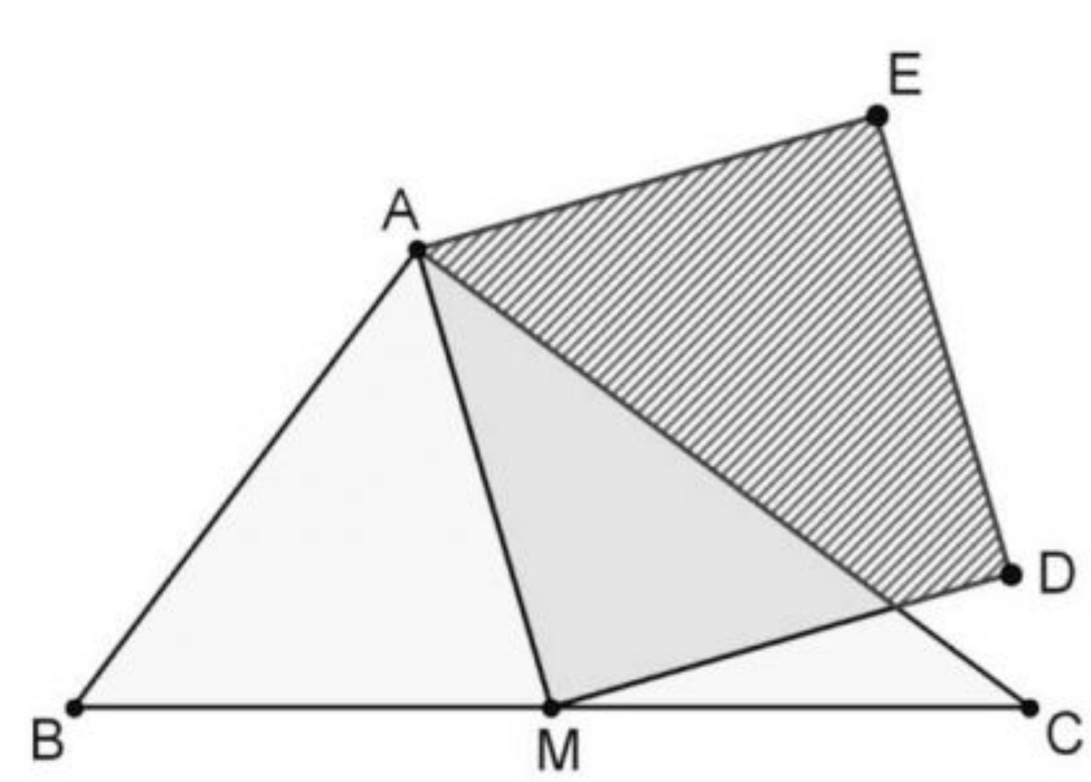
Liz y María compiten en la resolución de problemas. A cada una de ellas se les da la misma lista de 100 problemas. Para cualquier problema, la primera en resolver cualquiera de estos problemas obtiene 4 puntos, mientras que la segunda en resolverlo obtiene 1 punto. Liz resolvió 60 problemas, y María también resolvió 60 problemas. Juntas, consiguieron 312 puntos. ¿Cuántos problemas fueron resueltos por ambas?

Problema 5

Hoy es el cumpleaños de Carla, Emilia y Liliana. La suma de sus edades es 44. ¿Cuál será la suma de sus edades, la próxima vez que ésta suma vuelva a ser un número de dos dígitos iguales?

Problema 6

Sea ABC un triángulo tal que $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm y $BC = 10$ cm y sea M el punto medio de BC, sabiendo que $AMDE$ es un cuadrado y MD intersecta AC en el punto F. Determinar el área del cuadrilátero $AFDE$ en cm2.

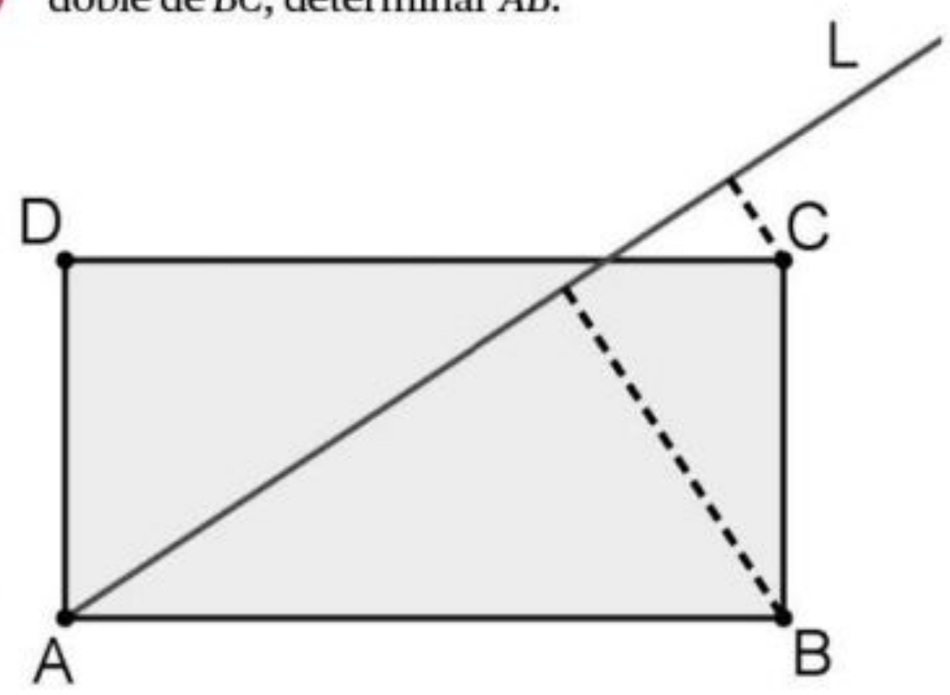


Problema 7

La función $f(x) = ax+b$ satisface las igualdades $f(f(f(1))) = 29$ y $f(f(f(0))) = 2$. ¿Cuál es el valor de a?

Problema 8

La línea L pasa por el vértice *A* de un rectángulo *ABCD*. La distancia del punto *C* a *L* es 2, y la distancia del punto *B* a *L* es 6. Si *AB* es el doble de *BC*, determinar *AB*.



Problema 9

El promedio de dos números positivos es 30% menos que uno de ellos. ¿En qué porcentaje es mayor este promedio al otro número?

Problema 11

Las trillizas Javiera, Daniela y Luisa querían comprar sombreros idénticos. Sin embargo, a Javiera le faltaba un tercio del precio, a Daniela un cuarto y a Luisa un quinto. Cuando los sombreros estuvieron $ 940 más baratos, las hermanas juntaron sus ahorros y cada una de ellas compró un sombrero.

No les sobró ni un peso. ¿Cuál era el precio de un sombrero antes de que su precio disminuyera?

Problema 10

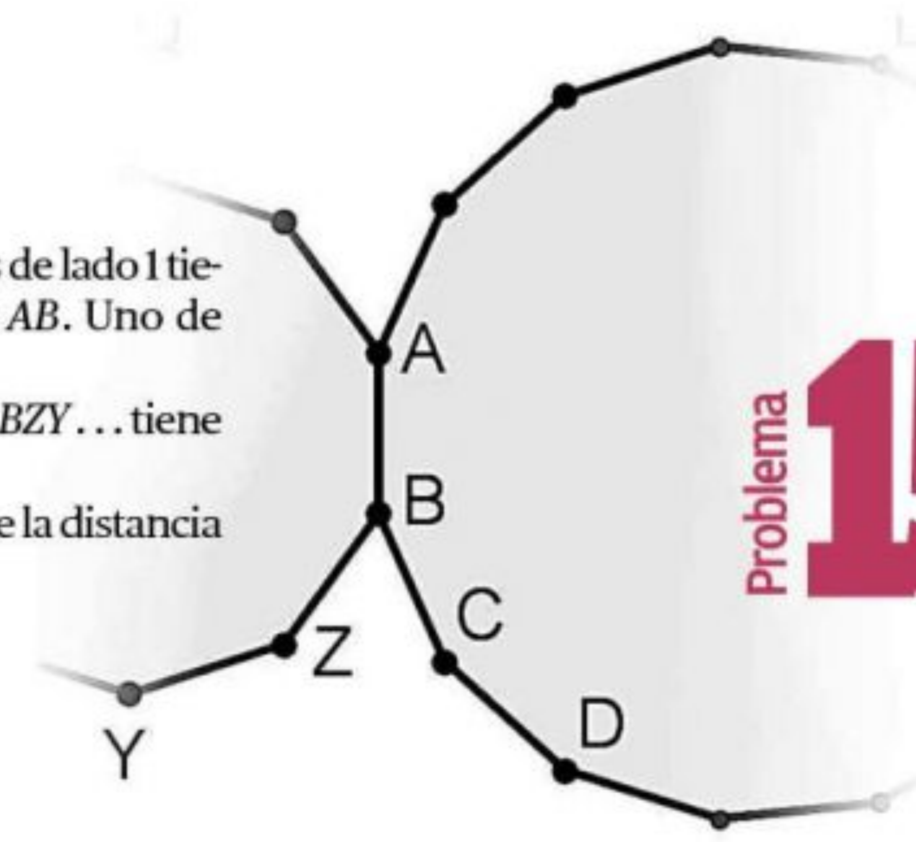
El cuadrilátero *ABCD* tiene ángulos rectos en los vértices *A* y *D*. Se han trazado las diagonales del cuadrilátero y en la imagen se muestran las áreas de dos de los triángulos generados por las diagonales.
¿Cuál es el área del cuadrilátero *ABCD*?

Problema 13

En una isla, las ranas son siempre verdes o azules, cuando el número de ranas verdes se redujo en un 60%. Resultó que la nueva relación de las ranas azules a las ranas verdes es igual a la relación anterior pero en el orden opuesto (ranas verdes a las ranas azules).
¿En qué porcentaje se modificó el número total de las ranas?

Problema 12

Dos polígonos regulares de lado 1 tienen en común el lado *AB*. Uno de ellos *ABCD*. . .
tiene 15 lados y el otro *ABZY* . . . tiene *n* lados.
¿Qué valor de *n* hace que la distancia *CZ* sea igual a 1?



Problema 15

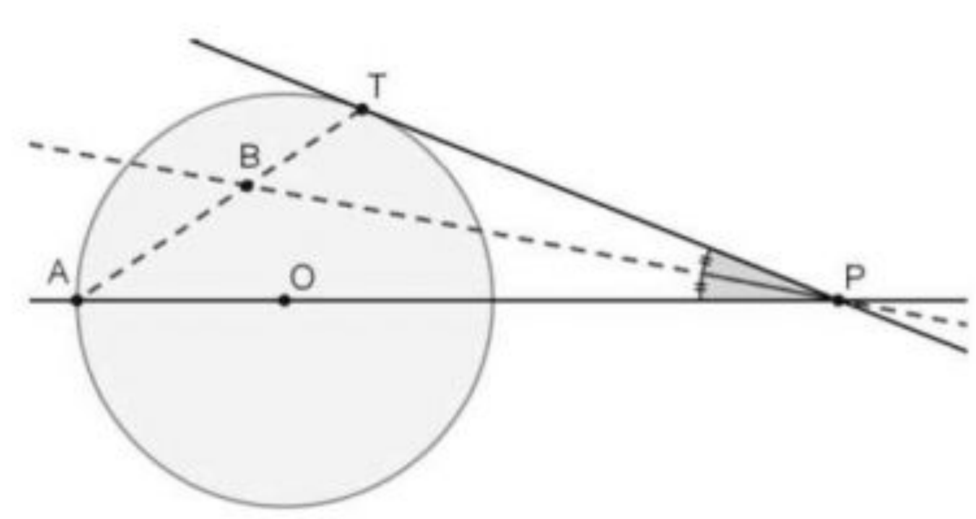
En la imagen hay un dado especial. Los números las las caras opuestas siempre suman lo mismo. Los números que no podemos ver en la imagen son todos números primos.
¿Qué número es opuesto al 14?

Problema 14

En un pueblo, la razón entre hombres adultos y mujeres adultas es de 2 : 3 y la razón entre las mujeres y los hijos es de 8 : 1. ¿Cuál es la razón entre los adultos (hombres y mujeres) y los niños?

Problema 17

En la imagen, *PT* es tangente a una circunferencia *C* con centro *O* y *PB* bisectriz del ángulo *TPA*. Calcula el ángulo *TBP*.



Problema 16

Una nueva especie de cocodrilo ha sido descubierta en África. La longitud de la cola es de un tercio de toda su longitud. Su cabeza es de 93 cm de largo y esta corresponde a la cuarta parte de la longitud del cocodrilo sin su cola.
¿Cuánto mide este cocodrilo en cm?

Problema 18

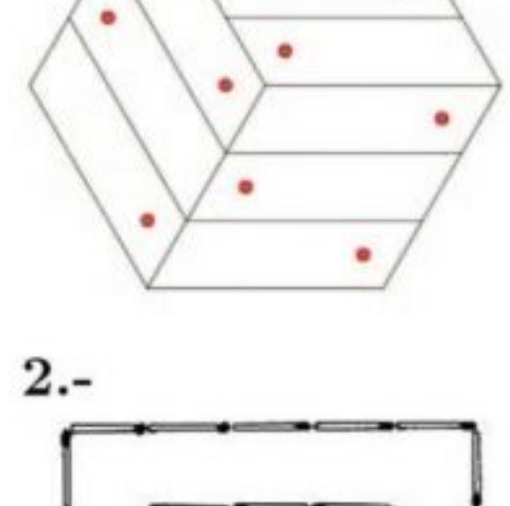
El Capitán Sparrow y su tripulación pirata desenterraron varias monedas de oro. Ellos dividen las monedas entre sí de manera que cada uno recibe el mismo número de monedas. Si hubieran cuatro piratas menos en la tripulación, entonces cada persona recibiría 10 monedas más. Sin embargo, si hubieran 50 monedas menos, cada persona recibiría 5 monedas menos.
¿Cuántas monedas desenterraron?

Soluciones

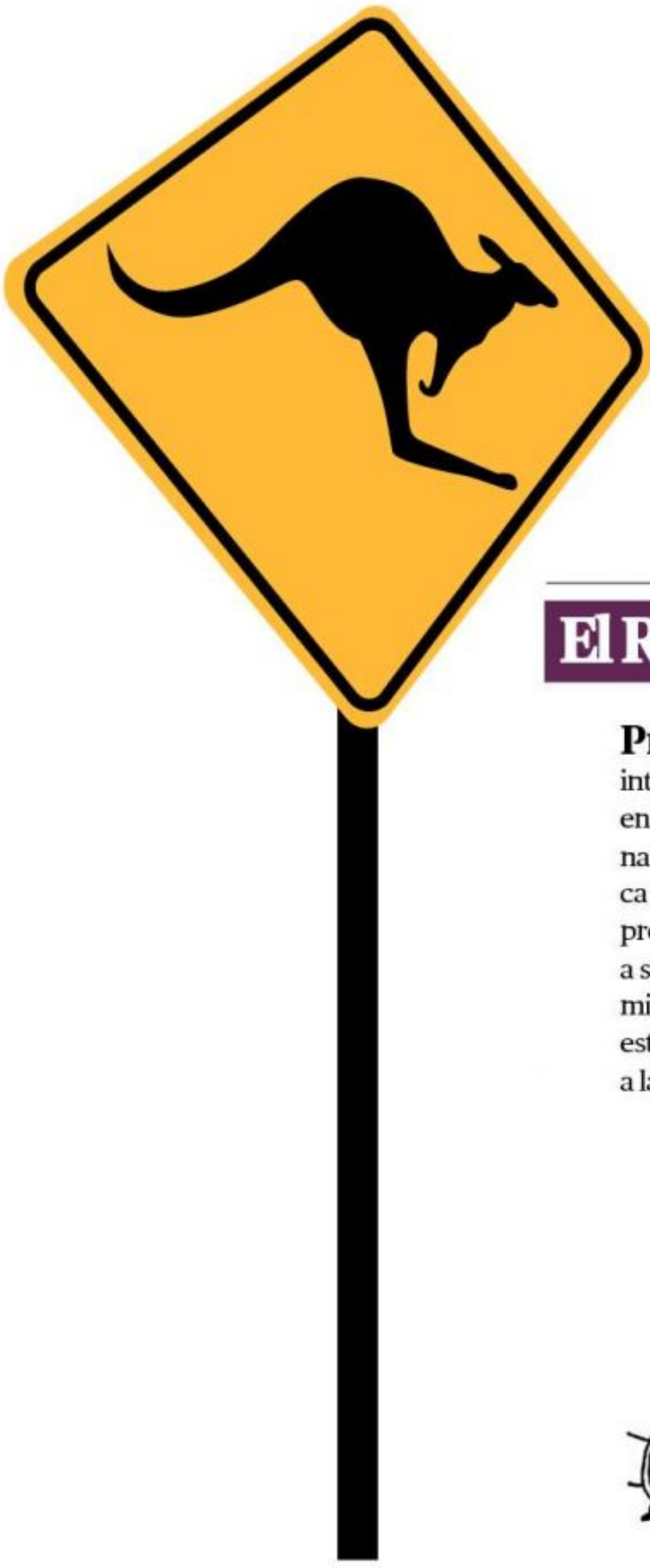
Problema 1: 07:49.
Problema 2: $n = 10$.
Problema 3: 16 cm^2
Problema 4: 56 problemas.
Problema 5: 77.
Problema 6: $\frac{125}{8}$ cm^2.
Problema 7: $a = 3$.
Problema 8: $AB = 10$.
Problema 9: En un 75 %.
Problema 10: $10u^2$.
Problema 11: $3600
Problema 12: $n = 10$
Problema 13: Disminuyeron en un 20 %
Problema 14: $\frac{40}{30}$
Problema 15: El número 23.
Problema 16: 558 cm.
Problema 17: 45°
Problema 18: Desenterraron 150 monedas.

Rincón del Abuelo Anacleto

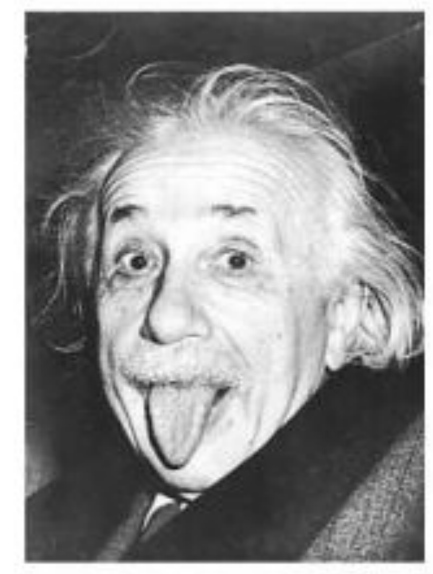
1.-



2.-

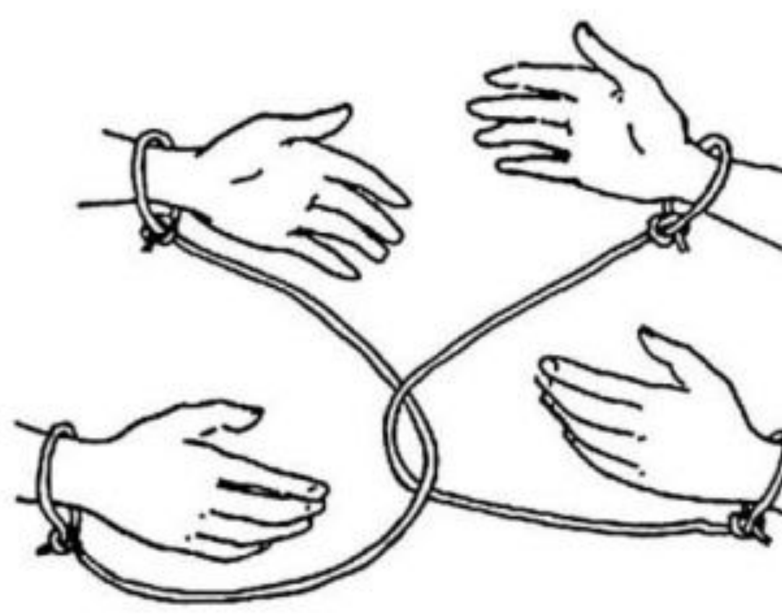


7º Campeonato de Matemática de la Universidad de La Frontera



El Rincón del Abuelo Anacleto

Problema 1: Una sabia hormiga (que no había estudiado mucha geometría) intentaba explicarle a una joven y aventurera hormiga exploradora la diferencia entre caminar y volar. Le decía: si tú y una de tus compañeras exploradoras caminan siempre en línea recta, es posible que los caminos que ambas recorran nunca se encuentren; en cambio, si dos aviones vuelan por el aire en línea recta siempre manteniendo la misma distancia a la tierra y van dejando una estela de humo a su paso, las dos estelas de humo en algún momento se cruzarán. La joven hormiga exploradora preguntó ¿A qué se debe esto?, y la sabia hormiga respondió: esto se debe a “la magia de la tercera dimensión”, dicha respuesta no convenció a la exploradora. ¿Puedes dar una mejor explicación?



Problema 2: Ate sus muñecas con una cuerda larga. Asegúrese de que los lazos alrededor de sus muñecas no estén demasiado ajustadas. Haga que un amigo haga lo mismo, pero antes de cruzar la cuerda alrededor de la suya, como se muestra en la imagen. ¿Pueden separarse sin desatar los nudos o cortar la cuerda?

Problemas Segunda Fecha

Problema 1

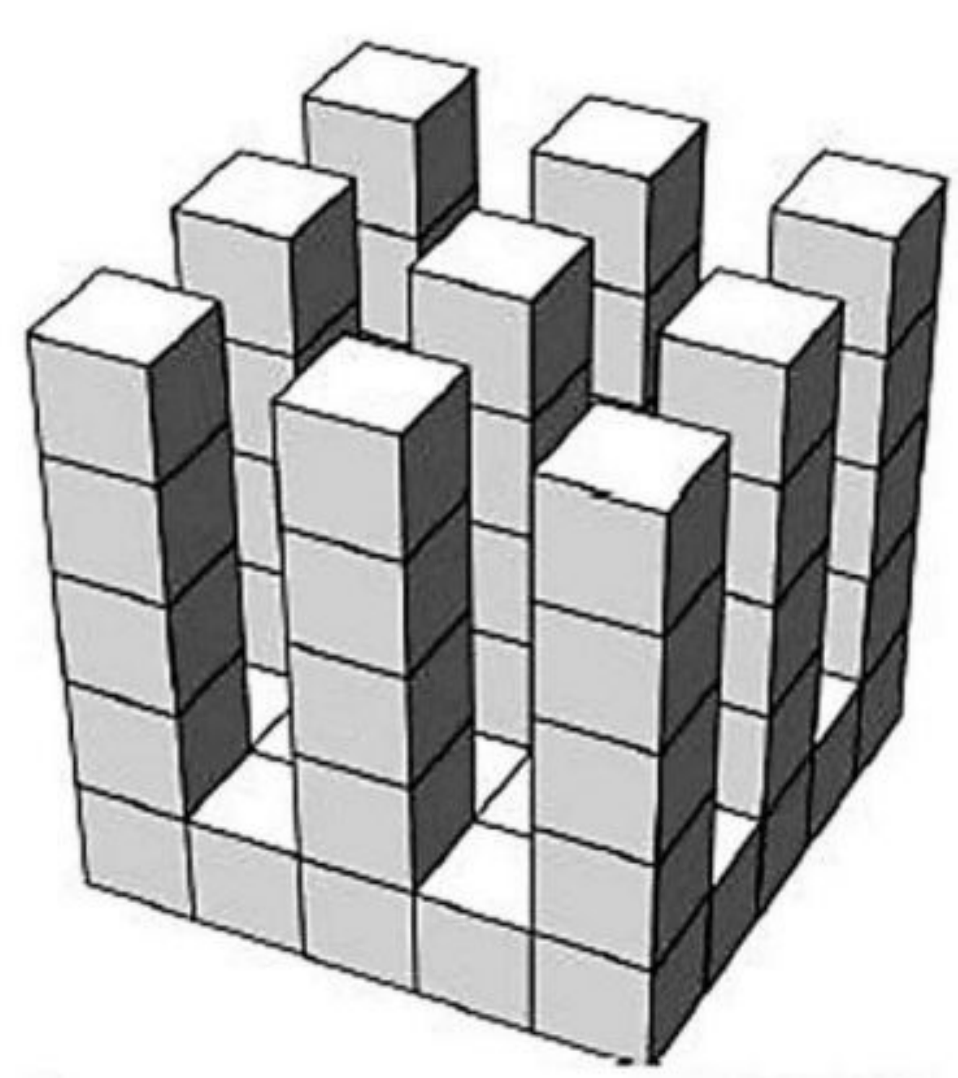
Una abuela, su hija y su nieta pueden decir este año que la suma de sus edades es 100. ¿En qué año nació la nieta si cada una de las edades es una potencia de 2?

Problema 2

Un rectángulo tiene lados de longitudes 6 cm y 11 cm. Se selecciona uno de los lados largos y se dibujan las bisectrices de los ángulos en cada extremo de ese lado. Estas bisectrices dividen el otro lado largo en tres partes. ¿Cuáles son las longitudes de estas secciones?

Problema 3

De un cubo de 5 x 5 x 5 formado por cubos pequeños de 1 x 1 x 1 se han sacado algunos cubos pequeños, quedando el cuerpo que se muestra en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños 1 x 1 x 1 se han sacado?

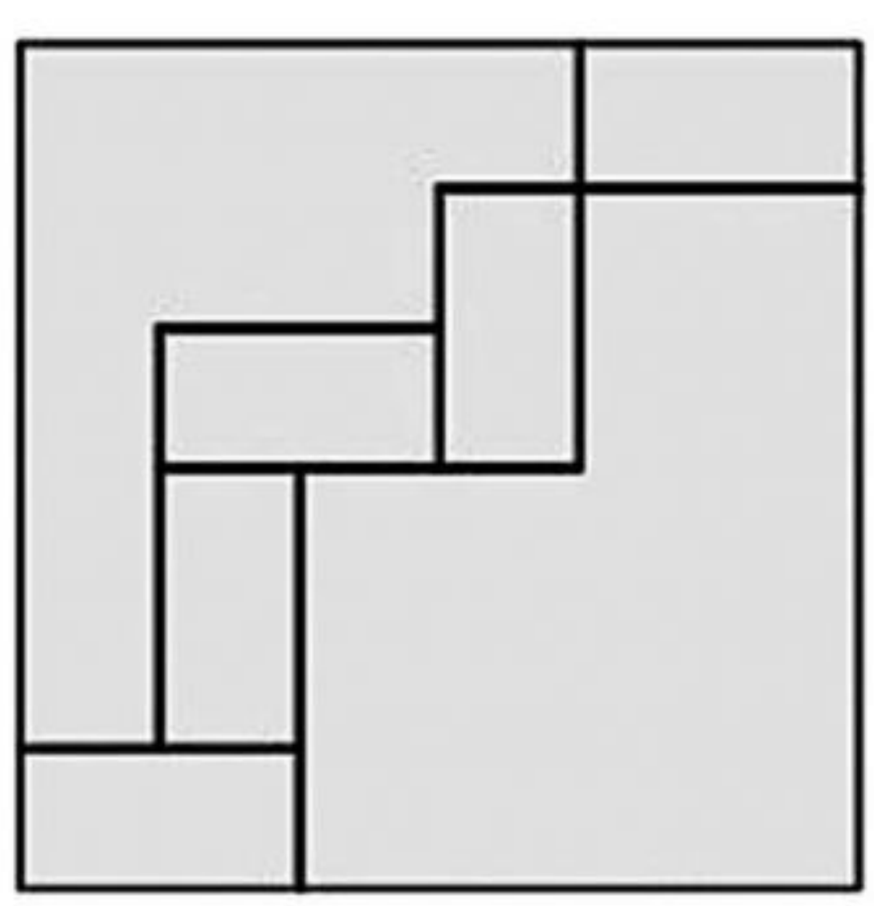


Problema 4

Hay 48 pelotas colocadas en tres canastas de diferentes tamaños. La canasta más pequeña junto con la más grande, contienen dos veces el número de pelotas que contiene la canasta mediana. La canasta más pequeña contiene la mitad de número de pelotas que tiene la canasta del centro. ¿Cuántas pelotas hay en la canasta grande?

Problema 5

Cinco rectángulos iguales se colocan dentro de un cuadrado de 24 cm de lado, como se muestra en el diagrama. ¿Cuál es el área de un rectángulo?



Problema 6

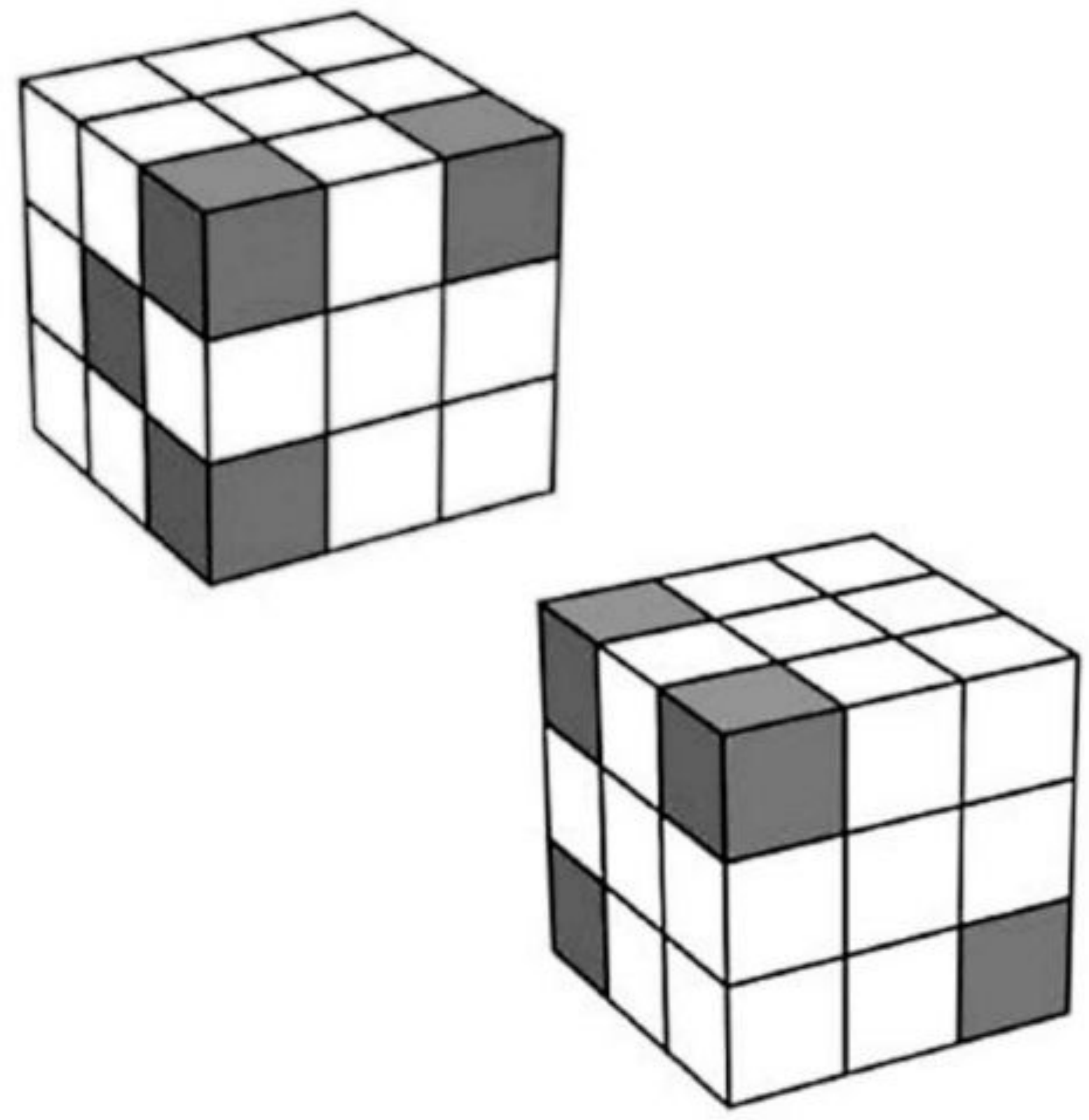
Cada año, el tercer Jueves del mes de Marzo aparece el Trauco en Chiloé. ¿Cuál es la fecha a más tardar en que puede aparecer el Trauco algún año?

Problema 7

Cuál es la negación de la siguiente declaración “Todo el mundo resuelve más de 20 problemas”.

Problema 8

La imagen muestra el mismo cubo desde dos puntos de vista diferentes, el cual está construido a partir de 27 cubos pequeños, algunos de ellos son de color negro y algunos son blancos.
¿Cuál es el mayor número de cubos negros que podrá haber?



Problema 9

Ana ha caminado 8 kilómetros con una velocidad de 4 km/h. Ahora ella correrá algún tiempo con una velocidad de 8 km/h. ¿Cuánto tiempo le queda por correr para que su velocidad promedio global sea de 5 km/h?

Problema 10

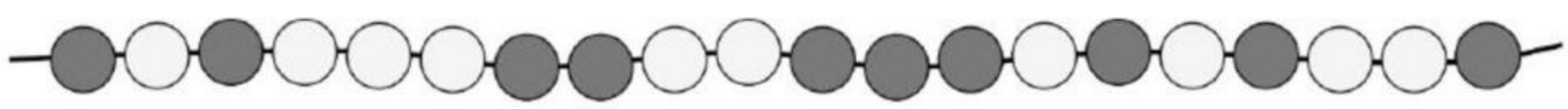
Hay 2014 personas en una fila. Cada uno de ellos o es un mentiroso (que siempre miente) o es un caballero (que siempre dice la verdad). Cada persona dice “Hay más mentirosos a mi izquierda que caballeros a mi derecha”.
¿Cuántos mentirosos hay en la fila?

Problema 11

Con cualquier trío de vértices de un cubo que no estén sobre una misma cara formamos un triángulo.
¿Cuántos triángulos se pueden formar con esta condición?

Problema 12

El collar de la imagen contiene perlas grises y perlas blancas. Marcos saca una perla tras otra del collar. Siempre saca una perla de uno de los extremos. Se detiene cuando ha quitado la quinta perla gris.
¿Cuál es el mayor número de perlas blancas que Marcos puede sacar?

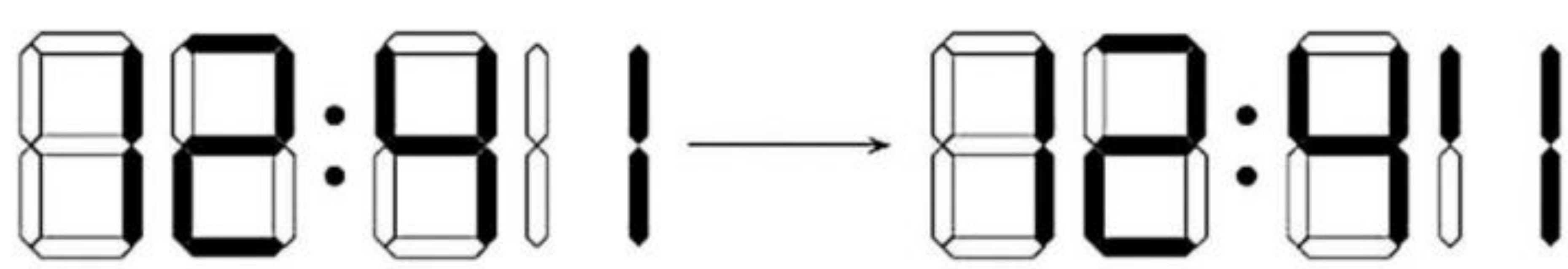


Problema 13

Un número natural tiene tres dígitos. Cuando multiplicamos las cifras obtenemos 135.
¿Qué resultado se obtiene si sumamos los dígitos?

Problema 14

El reloj digital de Benito no está funcionando correctamente. Las tres líneas horizontales en el dígito de la derecha en el reloj no se muestran. Benito está mirando su reloj y la hora que se muestra a la izquierda ha cambiado en un minuto, esta nueva hora se muestra a la derecha.
¿Qué hora es ahora?



Problema 15

Algunos árboles crecen en sólo un lado del Cerro Ñielol. Hay 60 árboles en total. Uno de cada dos árboles es un nitro, y uno de cada tres árboles es o bien un tilo o un notro. Los árboles que quedan son los pinos.
¿Cuántos pinos hay?

Problema 16

La rueda grande de esta bicicleta tiene 4,2 metros de perímetro. La rueda pequeña tiene 0,9 metros de perímetro. En un determinado momento, las válvulas de las dos ruedas están en su punto más bajo. La bicicleta rueda hacia a la izquierda.
¿Después de cuántos metros estarán nuevamente las dos válvulas en su punto más bajo?

Problema 17

Hay 5 canciones: La canción *A* tiene una duración de 3 minutos, la canción *B* dura 2 minutos con 30 segundos, la canción *C* dura 2 minutos, la canción *D* dura 1 minuto con 30 segundos, y la canción *E* dura 4 minutos. Estas 5 canciones se están reproduciendo en el orden *A;B;C;D;E* sin interrupciones. La canción *C* comenzó a sonar cuando Andrés se fue de casa. Regreso a su casa exactamente una hora más tarde. ¿Qué canción estaba sonando cuando Andrés llegó a su casa?

Problema 18

En la siguiente figura hay un octágono regular. El área sombreada mide 3 cm².
Encontrar el área del octágono .

Problema 19

En el número 2014 el último dígito es más grande que la suma de los otros tres dígitos.
¿Cuántos años atrás fue la última vez que ocurrió esto?

Problema 20

Vania puso sus piedras en grupos sobre la mesa. Cuando ella organizó las piedras en grupos de 3, encontró que le sobraban 2 piedras. Luego acomodo las piedras en grupos de 5, y de nuevo le sobraron 2 piedras. ¿Cuántas piedras más necesita aparte de las que tiene para que no sobre ninguna al momento de juntarlas en grupos de 3 y de 5?

Solución

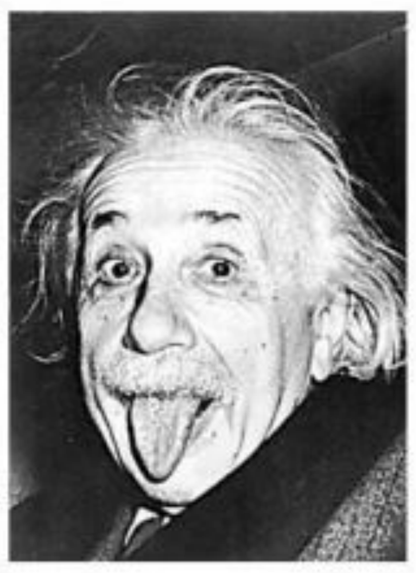
Problema 1:
Nació en el año 2010.
Problema 2: 1 y 5 cm.
Problema 3:
Faltan 64 cubos pequeños.
Problema 4: Hay 24 pelotas.
Problema 5: 32 cm2
Problema 6: 21 de Marzo.
Problema 7: Alguien resuelve menos de 21 problemas.
Problema 8: 9 cubos.
Problema 9:
Le quedan 40 minutos.
Problema 10: 1007 mentirosos.
Problema 11:
32 triángulos.
Problema 12:
Puede sacar hasta 7 perlas.
Problema 13: 17.
Problema 14: 12:44.
Problema 15: 20.
Problema 16:
Después de 12,6 metros.
Problema 17: La canción A.
Problema 18: 12 cm2.
Problema 19: Hace 5 años.
Problema 20:
Necesita 13 piedras.

Solución El Rincón del Abuelo Anacleto

7º Campeonato de Matemática de la Universidad de La Frontera

dme.ufro.cl/cpmat

El Rincón del Abuelo Anacleto



1. Sabemos que no puede haber primos consecutivos, salvo la dupla {2, 3}. Esto resulta obvio si uno piensa que en cualquier dupla de números consecutivos, uno de ellos será par. Y el único primo par es el 2. Luego, el único par de primos consecutivos es el {2, 3}. Ahora bien, si uno sabe que no va a encontrar primos consecutivos, qué pasa si uno se salta uno? Es decir, ¿hay dos impares consecutivos que sean primos?. Por ejemplo las duplas {3, 5}, {5, 7}, {11, 13}, {17, 19} son primos, y son dos impares consecutivos. Justamente se llama primos gemelos a dos números primos que difieren en dos unidades, como en los ejemplos que acabamos de ver. O sea, son de la forma p, p + 2. El primero en llamarlos primos gemelos fue Paul Stackel (1892-1919). El par de primos gemelos más grande que se conoce hasta hoy es:

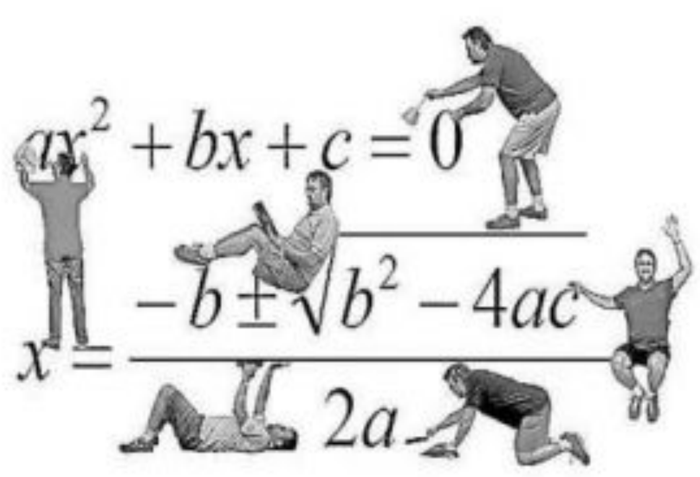
$$2003663613 \cdot 2^{195000} - 1 \text{ y } 2003663613 \cdot 2^{195000} + 1$$

Que tienen 58711 dígitos y fueron descubiertos en 2007. Hay muchísimo material escrito sobre este tema, pero aún hoy la conjetura de la infinitud de primos gemelos sigue sin solución.

2. El abuelo Anacleto propone a sus nietos el siguiente ejercicio para comprobar su familiaridad con los grandes números. A partir de un libro de Historia de la tierra pide a sus nietos que intenten ubicar toda la historia en las 24 horas de un día. ¿Te imaginas a qué hora apareció el hombre?

00:00: Hace 4.567 millones de años. Se forma la Tierra.
09:35: Hace 3.900 millones de años. Aparecieron los primeros océanos y continentes.
11.00: Hace 2.500 millones de años. Surgen las primeras Células.
21.05: Hace 1.000 millones de años. La Tierra atraviesa una intensa y larga edad de hielo.
21.10: Hace 542 millones de años. Surgen organismos complejos en el océano.
21.50: Hace 416 millones de años. Los anfibios salen a la Tierra.
22.42: Hace 251 millones de años. Surgen los primeros mamíferos y los dinosaurios.
23.40: Hace 65 millones de años. Desaparecen los dinosaurios y ganan terreno los mamíferos.
23.54: Hace 8 millones de años. Surgen los primeros homínidos y los mamíferos modernos.
23:59: Hace 150.000 años aparece el Homo Sapiens.

Es curioso que sólo hemos vivido un minuto.



3. En un torneo de tenis se inscriben 128 participantes. Como es bien sabido se juega por simple eliminación. Es decir: el jugador que pierde un partido queda eliminado. La pregunta es ¿cuántos partidos se jugaron en total hasta definir el campeón?. El objetivo es encontrar dos soluciones al problema, la idea es poner a prueba la capacidad para pensar distinto, para pensar en forma no convencional.

Solución

Como hay 128 participantes, para que uno quede eliminado tiene que perder un partido. Nada más que uno. Luego, si hay 128 participantes al comienzo del torneo, y al final queda uno (el campeón, quien es el único que no perdió ninguno de los partidos que jugó), significa que los restantes 127, para haber quedado eliminados tienen que haber perdido exactamente un partido. Y como en cada partido siempre hay exactamente un ganador y un perdedor, lo que tuvo que pasar es que tuvieron que jugarse 127 partidos para que quedaran eliminados todos y quedara uno sólo que fue el único que los ganó todos.

Si lo hubiéramos hecho de la otra forma, el resultado es (obviamente) el mismo: 64 partidos en la primera ronda, 32 después, 16 en los dieciseisavos de final, 8 en los octavos de final, 4 en los cuartos de final, dos en las semifinales y uno en la final. Si uno suma todos estos partidos 64+32+16+8+4+2+1 =127.

Problemas Tercera Fecha

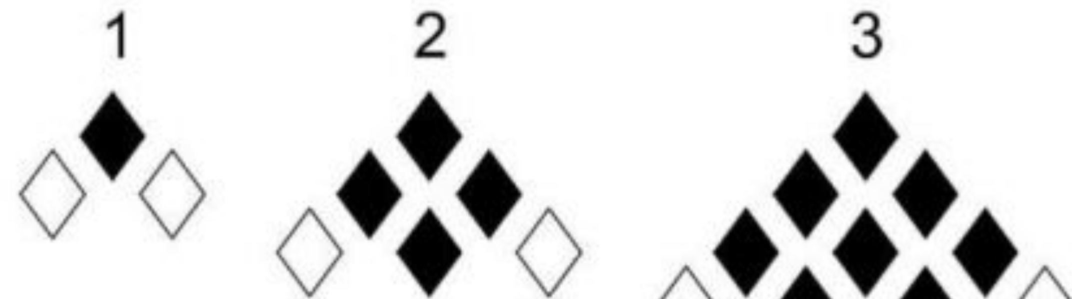
Campeonato de Matemática de la Universidad de La Frontera
dme.ufro.cl/cmat

Problema 1

A un conejo le gustan mucho las zanahorias y el repollo. En un día se puede comer o 9 zanahorias, o 2 repollos, o 4 zanahorias y 1 repollo. Durante una semana ha comido 30 zanahorias. **¿Cuántos repollos ha comido durante esta semana?**

Problema 2

Se realiza una secuencia de triángulos de diamantes. En la figura se muestran las tres primeras etapas. En cada etapa se añade una línea de diamantes. En las líneas inferiores los diamantes exteriores son de color blanco. El resto de los diamantes en el triángulo son negros. **¿Cuántos diamantes negros tiene la figura en la etapa número 6?**



Problema 3

Un jugador de ajedrez jugó 40 partidos y acumuló 25 puntos (una victoria cuenta como un punto, un empate cuenta como medio punto, y una derrota cuenta como cero puntos) **¿Cuál es la diferencia entre partidos ganados y partidos perdidos?**

Problema 4

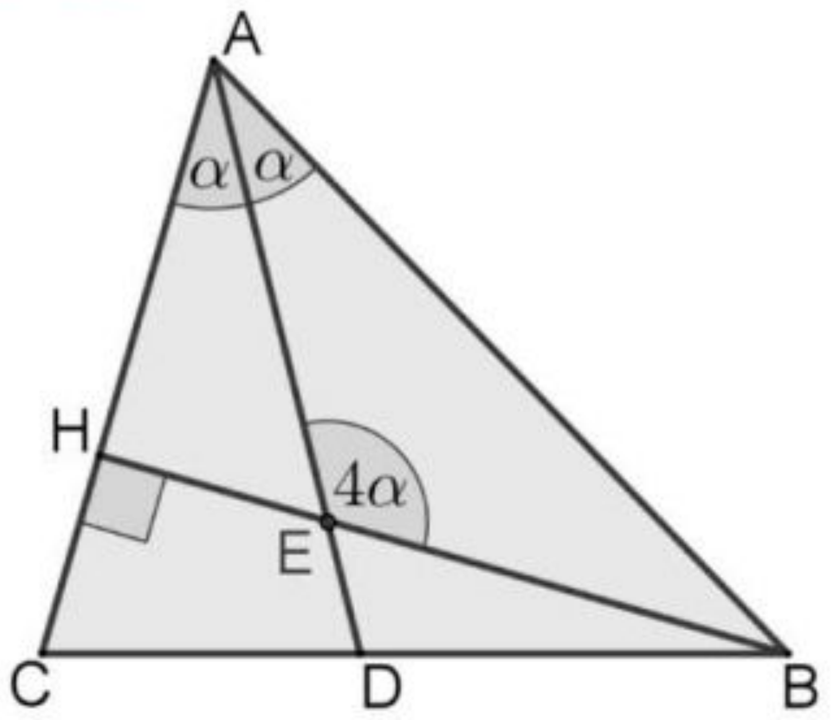
En el número 2014 los dígitos son diferentes y el último dígito es mayor que la suma de los otros tres dígitos. **¿Qué año antes de 2014 ocurrió esto por última vez?**

Problema 5

En un grupo de 25 personas formado por caballeros, niños y damas. Los caballeros siempre dicen la verdad, los niños siempre mienten, y de las damas algunas mienten y otras dicen la verdad. Cuando se les preguntó: **"¿Es usted una dama?"**, 12 de ellos dijeron: "Sí". Cuando se les preguntó: **"¿Es usted un niño?"**, 8 de ellos dijeron: "Sí". **¿Cuántos caballeros hay en el grupo?**

Problema 6

La figura muestra el triángulo ABC en donde BH es una altura y AD es bisectriz de A. El ángulo obtuso entre BH y AD es cuatro veces el ángulo DAB. ¿Cuánto mide el ángulo CAB?



Problema 7

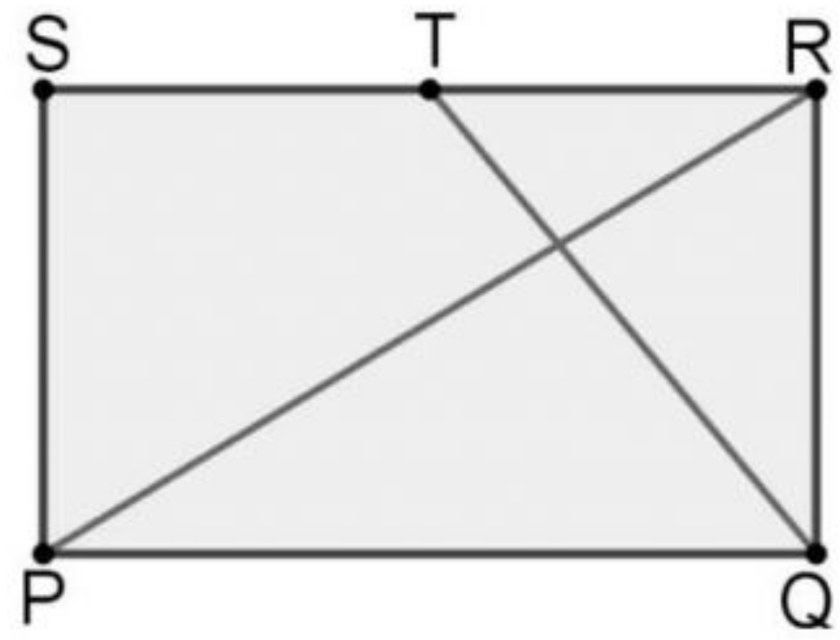
¿Qué tripletas (a, b, c) de enteros con $a > b > c > 1$ satisface que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$?

Problema 8

Diferentes números enteros positivos se escriben en el pizarrón. Exactamente dos son divisibles por 2 y exactamente 13 de ellos son divisibles por 13. Sea M el más grande de estos números. ¿Cuál es el menor valor posible de *M*?

Problema 10

PQRS es un rectángulo. *T* es el punto medio RS. *QT* es perpendicular a la diagonal *PR*. ¿Cuál es la razón *PQ* : *QR*?

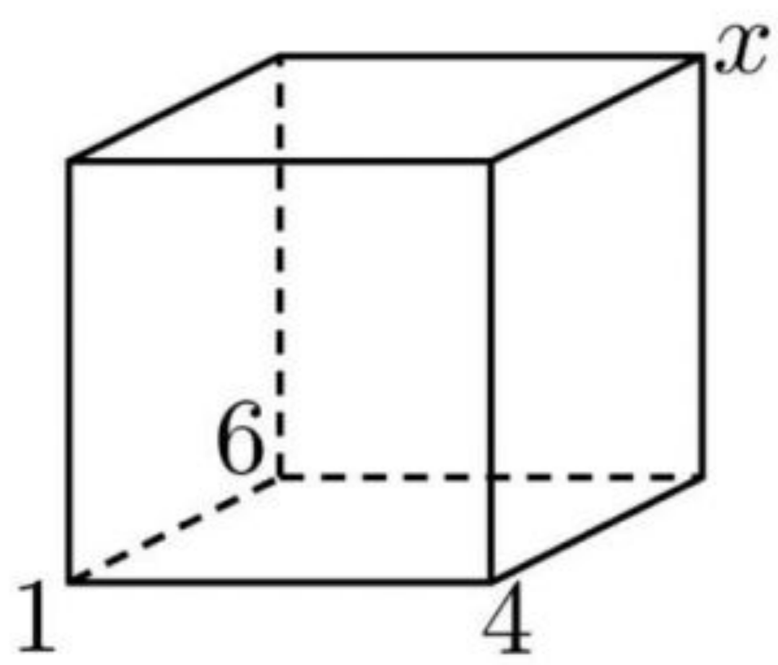


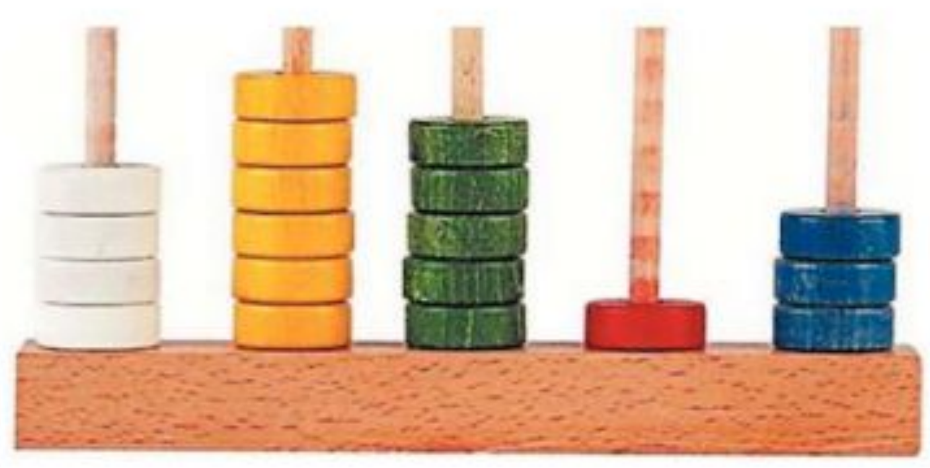
Problema 11

Una pesa no está funcionando correctamente. Si algo es más ligero que 1000 g, la pesa muestra el peso correcto. Sin embargo, si algo es más pesado o igual que 1000 g, la pesa puede mostrar cualquier número por encima de 1000 g. Tenemos 5 pesos A, B, C, D, E cada uno bajo los 1000 g. Cuando se pesan de dos en dos la pesa muestra lo siguiente: $B + D = 1200$, $C + E = 2100$, $B + E = 800$, $B + C = 900$, $A + E = 700$. ¿Cuál de éstos es el que más pesa?

Problema 9

Los vértices de un cubo se enumeran de 1 a 8 de manera que el resultado de la suma de los cuatro vértices de una cara es la misma para todas las caras. Los números 1, 4 y 6 ya se encuentran establecidos en algunos vértices como se muestra en la figura. ¿Cuál es el valor de *x*?





Problema 12

Las igualdades

$$k = (2014 + m)^{\frac{1}{n}} = 1024^{\frac{1}{n}} + 1$$

son dadas para enteros positivos *k, m, n*. ¿Cuántos valores diferentes puede tomar la cantidad *m*?

Problema 13

Hay 9 canguros, ellos son de color plata o de color oro. Cuando 3 canguros se encuentran por casualidad, la probabilidad de que ninguno de ellos sea color plata es $\frac{2}{3}$.

¿Cuántos canguros son de color oro?

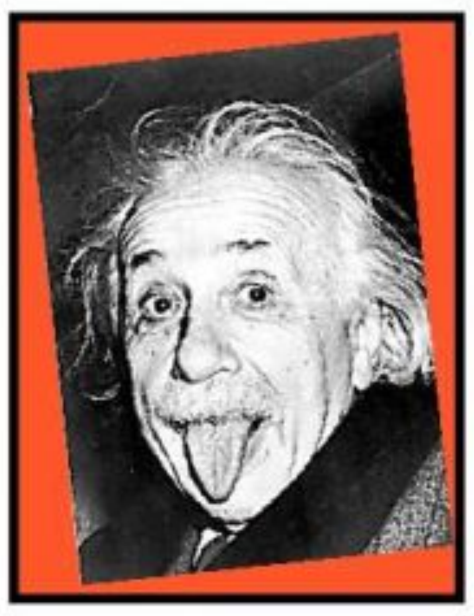
Problema 14

Los segmentos *AC* y *BD* se cortan en un punto *P*, con $PA = PD$ y $PB = PC$. El punto *O* es el centro de una circunferencia que pasa por los puntos *P*, *A* y *B*. Determinar el valor de los ángulos entre las rectas *OP* y *CD*.

Solución

Problema 1: 7 repollos. **Problema 2**: 26 diamantes negros. **Problema 3**: 10. **Problema 4**: 1709. **Problema 5**: 5 caballeros. **Problema 6**: $\angle CAB = 30^\circ$. **Problema 7**: (2,3,4) y (2,3,5). **Problema 8**: 273 **Problema 9**: $x = 2$. **Problema 10**: $\sqrt{2} : 1$. **Problema 11**: *D*. **Problema 12**:1111 y 57035. **Problema 13**: 8 canguros. **Problema 14**: 90°.

7º Campeonato de Matemática
de la Universidad de La Frontera



El Rincón del **Abuelo Anacleto**

Se dice que dos números positivos *a* y *b* están en razón áurea sí y sólo sí: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Este número resultante se denominó número de oro, sección áurea, o divina proporción, utilizada de forma empírica en la antigüedad. Curiosamente, esta proporción, considerada como la más armoniosa para la sensibilidad humana, se corresponde con las proporciones que nos presenta la naturaleza. La misma relación la encontramos entre las diferentes medidas de la cara, en las ramas de los árboles, en los cristales minerales, en las conchas marinas, en la relación entre los ejes mayor y menor de un huevo de gallina, en las nervaduras de las hojas, en el grosor de las ramas, en las semillas de los girasoles, en los cuernos de las cabras, etc. Esta proporción ha fascinado desde hace siglos al ser humano, que lo ha considerado un indicador de la perfección y la estética.

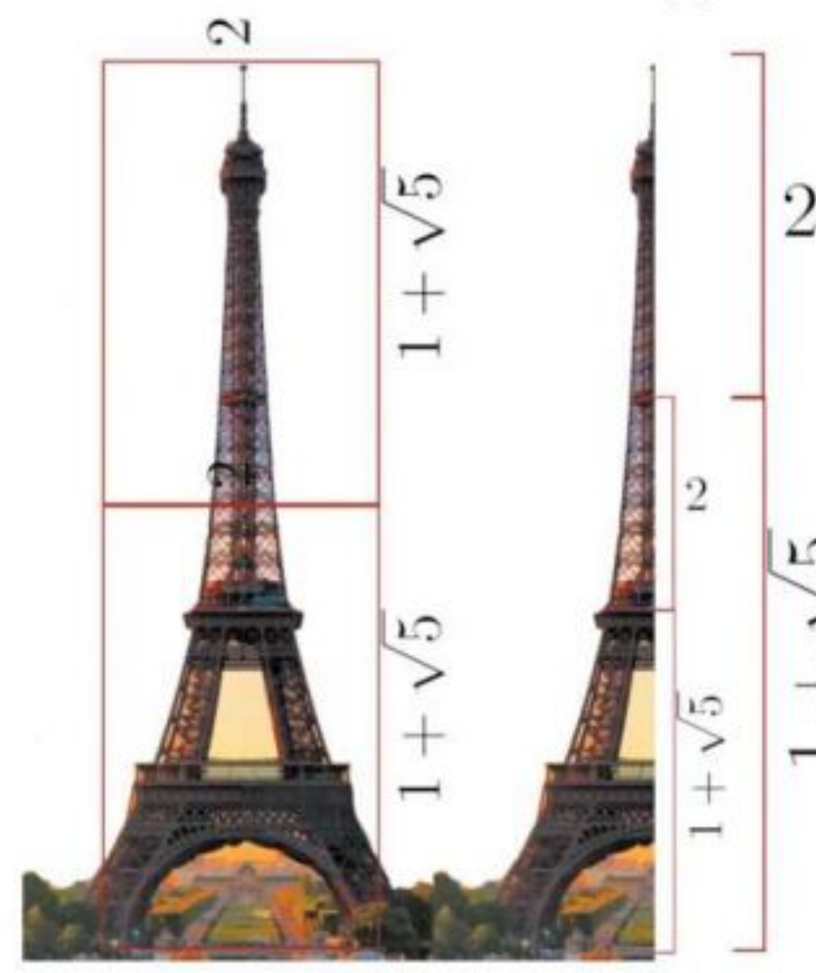
Se llama rectángulo áureo a aquel cuyo alto y ancho están en la razón $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618034..$ Este rectángulo se ajusta perfectamente a la fachada del Parthenon.

2

$1+\sqrt{5}$

En la torre Eiffel los ejes de sus cuatro pilares forman un cuadrado de 100 metros, que sería el lado pequeño de un rectángulo áureo. Pues poniendo dos rectángulos conseguimos la altura de esta torre:

$100 \cdot (1+\sqrt{5}) \approx 323,$ metros, que es la altura de la torre.



Esto es lo primero que te sugerimos comprobar: que la mayoría de los rectángulos que nos encontramos en nuestra vida cotidiana son áureos. Para ello mide tu Cédula de Identidad, un libro, el pase escolar, una tarjeta bancaria o cualquier otro rectángulo que lleves contigo y divide la medida más larga entre la más corta y comprueba que da un número aproximado a 1,618.

b

a

d

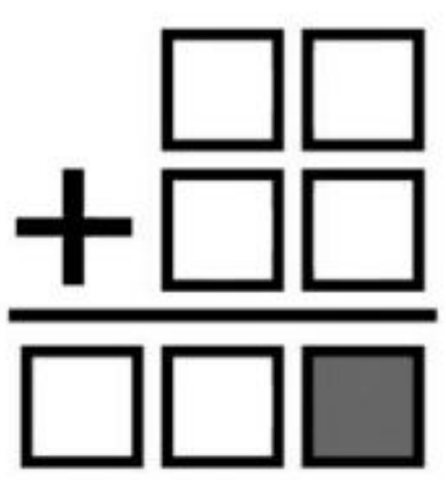
c

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Problemas Cuarta Fecha Campeonato de Matemática de la Universidad de La Frontera
dme.ufro.cl/cmat

Problema 1

Escribe cada uno de los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 en los cuadrados para hacer la adición correcta. ***¿Qué dígito estará en el cuadrado gris?***



Problema 2

Cuando Pinocho miente, su nariz se pone 7 cm más larga. Cuando él dice la verdad, la nariz se pone 4 cm más corta. Pinocho, hoy 28 de junio dijo 4 mentiras y 3 frases verdaderas y su nariz ahora mide 56 cm de largo. ***¿Cuánto medía la nariz de Pinocho ayer 27 de junio antes de decir estas 7 frases.?***

Problema 3

Andrés escribe todos los dígitos del 1 al 9 en las celdas de una tabla de 3×3, de manera que cada celda contiene un dígito. Él ya ha escrito el 1, 2, 3 y 4, como se muestra en la figura. Dos números son considerados como vecinos si sus celdas comparten un borde. Una vez introducidos todos los números se da cuenta de que la suma de los vecinos de 9 es 15. Determine la suma de los vecinos de 8.

1		3
2		4

Problema 4

Vicente escribió varios números con los dígitos 0 y 1. La suma de estos números es 2014. Pero Vicente fue ingenioso y logró que la cantidad de números construidos con los dígitos 0 y 1 fueran lo menor posible. ***¿Cuántos números (que suman 2014) fueron escritos por Vicente?***

Problema 5

Seis niñas comparten un departamento con dos baños que utilizan todas las mañanas a partir de las 7.00 en punto. Ellas usan el baño una a la vez, y se sientan a desayunar juntas tan pronto como la última chica ha terminado. Pasan 9, 11, 13, 18, 22 y 23 minutos en el baño respectivamente. Estando bien organizadas, ***¿Cuál es la hora más temprana en que pueden desayunar juntas?***

Problema 6

En un partido de fútbol, el ganador recibe 3 puntos, el perdedor recibe 0 puntos, mientras que en el caso de un empate, cada equipo obtiene 1 punto. Cuatro equipos, *A, B, C, D,* participan en un torneo de fútbol. Cada equipo juega tres partidos. Al final del torneo el equipo A obtiene 7 puntos y el equipo B y C obtienen 4 puntos cada uno. ***¿Cuántos puntos obtuvo el equipo D?***

Problema 7

En una caja hay 200 fichas blancas y 200 fichas negras. El abuelo Anacleto saca de la caja 50 fichas blancas y 100 fichas negras, echándolas en una bolsa. Luego pide a su nieto Daniel que saque al azar 3 fichas de la bolsa. Si las 3 fichas que saca son blancas, debe devolverlas a la caja y traspasar de la caja a la bolsa 2 nuevas fichas negras. Si dos de las fichas son blancas y una negra, debe guardar en la caja la ficha negra y devolver las otras dos a la bolsa. Si una ficha es blanca y las otras dos son negras o si las tres son negras debe hacer lo mismo, guardar en la caja una ficha negra y devolver las otras dos a la bolsa. Se repite lo mismo una y otra vez, y la cantidad de fichas en la bolsa va disminuyendo hasta que quedan sólo dos. ***¿De qué color son estas dos fichas?***

Problema 8

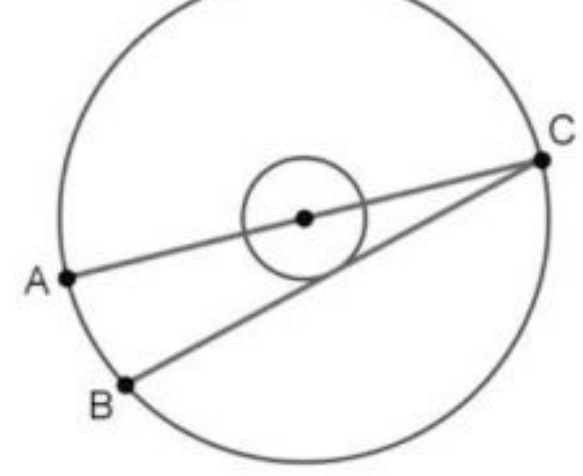
David viaja en su bicicleta desde Temuco a su parcela. Él debía llegar a las 15.00, pero gastó $\frac{2}{3}$ del tiempo planeado cubriendo $\frac{3}{4}$ de la distancia. Después de eso, pedaleó más lentamente y llegó justo a tiempo. ***¿Cuál es la razón entre la velocidad de la primera parte del viaje y la velocidad de la segunda parte del viaje?***

Problema 9

Diferentes números enteros positivos se escriben en el pizarrón. Exactamente dos son divisibles por 2 y exactamente 13 de ellos son divisibles por 13. Sea *M* el más grande de estos números. ***¿Cuál es el menor valor posible de M?***

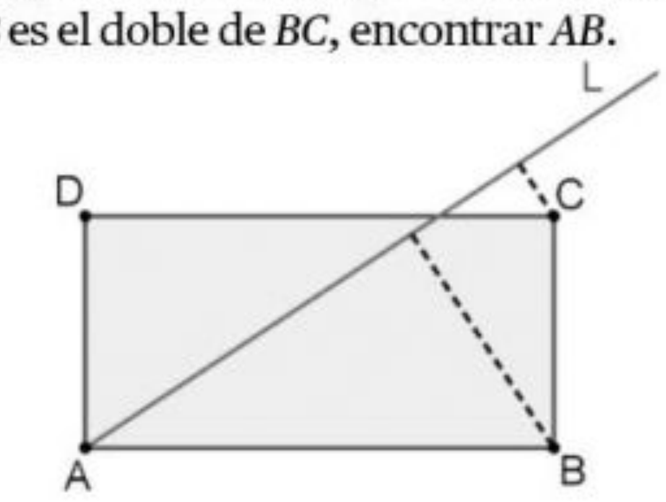
Problema 10

Los radios de dos círculos concéntricos están en la razón 1 : 3. *AC* es el diámetro del círculo grande; *BC* es una cuerda del círculo grande que es tangente al círculo más pequeño; y la longitud de la cuerda *AB* es 12. ***Calcule el radio del círculo grande.***



Problema 11

La línea L pasa por el vértice A de un rectángulo *ABCD*. La distancia del punto *C* a *L* es 2, y la distancia del punto *B* a *L* es 6. Si *AB* es el doble de *BC*, encontrar *AB*.



Problema 12

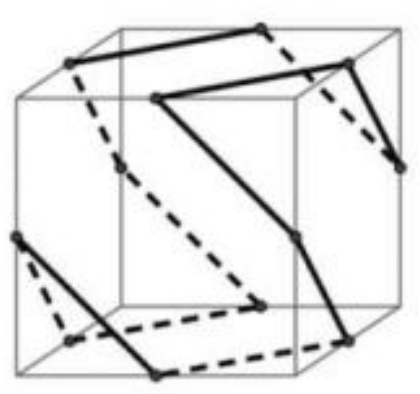
Tomás quiere escribir varios números enteros positivos distintos, ninguno de ellos mayor a 100. Por otra parte el producto de todos estos números no debe ser divisible por 54. ***¿Cuál es el máximo número de enteros que logra escribir?***

Problema 14

En un almacén hay varios recipientes. Los 33 más livianos (ligeros) pesan entre todos, $\frac{8}{23}$ del peso de todos los recipientes; los 30 más pesados, pesan entre todos, $\frac{22}{69}$ del peso total. ***¿Cuántos recipientes hay en total?***

Problema 13

El diagrama muestra una poligonal cuyos vértices son los puntos medios de las aristas de un cubo, esta figura la llamaremos tri-polígono. Un ángulo interior del tri-polígono está definido como el ángulo formado por dos segmentos consecutivos que se encuentran en un vértice. El diagrama muestra un tri-polígono cuyos vértices son los puntos medios de las aristas de un cubo.



Un ángulo interior del polígono está definido de la forma habitual: el ángulo entre los dos bordes se encuentran en un vértice. ***¿Cuál es la suma de todos los ángulos interiores del tri-polígono?***

Problema 15

La función $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ satisface las condiciones $f(4) = 6$ y $x \cdot f(x) = (x-3) \cdot f(x+1)$. el valor de $f(4) \cdot f(7) \cdot f(10) \cdot \ldots \cdot f(2011) \cdot f(2014)$?

Problema 16

En los bosques de una isla mágica viven tres tipos de animales: leones, lobos y cabras. Los lobos pueden comer cabras, y los leones pueden comer lobos o cabras. Sin embargo, siendo ésta una isla mágica, si un lobo se come una cabra, se convierte en león. Si un león se come una cabra, se convierte en lobo. Si un león se come un lobo, se convierte en una cabra. Originalmente, había 17 cabras, 55 lobos y 6 leones en la isla. En algún momento quedará un cierto número de animales que no podrá comerse entre ellos. ***¿Cuál es el mayor número de animales que puede quedar en la isla?***

Solución

Problema 1: 5 **Problema 2**: 40 cm. **Problema 3**: 15. **Problema 4**: 4 números. **Problema 5**: 7:49. **Problema 6**: 1 punto. **Problema 7**: 2 blancas. **Problema 8**: Después de 12, 6 m. **Problema 9**: $13 \cdot 21 = 273$ **Problema 10**: 18 unidades. **Problema 11**: 10 unidades. **Problema 12**: 69. **Problema 13**: $1080°$ **Problema 14**: 95 recipientes. **Problema 15**: 2013!.. **Problema 16**: 23.